## BO nº 30 du 29 juillet 1971

# - COMMENTAIRE -

## Pour les programmes de mathématiques des classes terminales

Le programme des classes terminales, comme celui de toutes les classes du Second degré n'assigne ni une durée, ni une place, ni une méthode, à l'exposé de chacun de ses chapitres ; dans l'ordre qu'il a suivi, il s'est surtout efforcé de dégager des idées générales et, aussi bien, de limiter le développement à donner aux différentes rubriques. Sa seule exigence est qu'au terme de l'année scolaire les élèves aient compris et sachent utiliser les notions qu'il a énumérées.

Moderniser l'enseignement des mathématiques n'autorise en rien à s'affranchir du souci de leurs applications. D'une part, en effet, ce sont les sciences expérimentales, avec l'esprit d'observation et l'esprit d'expérimentation, qui ont donné naissance au goût du raisonnement, dont l'emploi systématique caractérise les mathématiques mêmes ; d'autre part, ces dernières trouvent désormais des applications, non seulement dans les sciences expérimentales classiques, mais dans les sciences économiques et humaines, par exemple dans les problèmes de stratégie et de décision.

Donner aux futurs bacheliers les bases mathématiques solides et fécondes, qui leur permettront d'aborder tels ou tels de ces domaines particuliers conduit à leur dispenser d'abord un enseignement général et, de ce fait, tourné vers l'abstraction Ce serait, toutefois une erreur de penser que, seules comptent l'acquisition des concepts, la construction de théories à partir d'axiomes au choix habile ou laborieux ; la science mathématique ne peut se passer d'utiliser des techniques, qui doivent faire, dès lors, l'objet d'un enseignement et d'un entraînement.

Sans doute, ces techniques ont-elles une part réduite dans la section A, mais elles sont fondamentales, et à des titres divers, dans chacune des quatre sections B, C, D, E ; tout élève de l'une d'elles doit savoir, dans le cadre de son programme étudier avec aisance une fonction, calculer une dérivée ou une primitive ou une aire, composer des symétries ou des déplacements définis géométriquement ou, tout autant savoir utiliser les éléments de la géométrie analytique. Serait vaine toute connaissance théorique qui ne pourrait être appliquée à des exemples simples ; au reste, les épreuves de mathématiques du baccalauréat comportent actuellement un ou plusieurs exercices d'emploi de ces techniques.

La baccalauréat est la sanction normale de l'enseignement des classes terminales. Aussi, plus qu'en Première sans doute, le présent commentaire fixe-t-il avec grand soin ce qui peut, ou non, y être exigé ; à ce titre, il s'imposera aux responsable des épreuves écrites et orales pour l'interprétation du programme ; il en sera de même pour les examens et concours qui, à ce niveau, font des emprunts à ce programme.

Reste, bien entendu, exclue du baccalauréat toute question dont le commentaire de Première a précisé qu'elle n'appartient pas au programme de Première, lorsque le programme de Terminale ne l'a pas explicitement assumée.

Certaines notations, certaines notions, certains exposés peuvent être autorisés, parfois conseillés, sans être exigibles : les textes d'examens ne devront donc pas

y faire appel, mais les correcteurs et examinateurs devront considérer comme valables les réponses des candidats qui y feront référence explicite.

Naturellement, dans la conduite de sa classe, le professeur gardera sa liberté traditionnelle, dans la mesure où cette liberté se met au service de l'intérêt des élèves et de leurs préoccupations légitimes. Les professeurs des classes terminale sauront, à ce sujet s'inspirer des recommandations qui figurent dans la circulaire du 6 avril 1971 :

> *exposer sobrement le programme ;*
> *observer de façon habituelle les limites qu'en précise le commentaire ;*
> *contenir les développements purement spéculatifs ;*
> *bannir les anticipations ;*
> *et s'il est des manuels excessifs, en tempérer l'usage dans sa classe*

Il a paru commode d'analyser en premier lieu le programme de la section C qui requiert le développement le plus complet ; on signalera ensuite les caractères propres aux autres sections.

# - SECTION TERMINALE C -

## Commentaire général

## I Nombre entier naturels. Arithmétique

**§ 1** Les notions d'ensemble et de relation restent en classe terminale des notions premières ; aussi bien a-t-on déjà utilisé en Seconde et en Première le vocabulaire correspondant. La notation $X \times Y$ désigne le produit cartésien des ensembles $X$ et $Y$ : la notation $Y^X$ peut être utilisée pour désigner l'ensemble des applications de $X$ dans $Y$.

**Ne figurent au programme :**

- **Aucune construction d'une "théorie des ensembles"**
- **Aucune construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.** On énumérera seulement les propriétés admises de $\mathbb{N}$, par exemple :
  a) $\mathbb{N}$ est un ensemble totalement ordonné,
  b) $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, zéro,
  c) tout élément de $\mathbb{N}$ a un suivant,
  d) tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui contient zéro et le suivant de chacun de ses élément est $\mathbb{N}$

Cette dernière propriété permet de justifier le raisonnement par récurrence. On supposera connues les définitions et les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}$.

On appelle suite $S$ dans $X$ un application de $\mathbb{N}$ dans $X$ ; si $x_n$ est l'image de $S(n)$ de l'entier $n$ (terme général), on note par abus d'écriture $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ et, quand aucune confusion n'est possible, $(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. On appelle suite finie une application d'une partie finie de $\mathbb{N}$ dans $X$.

La construction de $\mathbb{Z}$ est au programme ; c'est le seul exemple de symétrisation à donner (la notion de demi-groupe n'est pas au programme).

**§ 2 et 3** Naturellement aucun ordre n'est imposé pour l'étude de ces deux paragraphes. L'ensemble des multiples d'un entier relatif $a$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{Z}$, il est stable par la multiplication, on le notera $a\mathbb{Z}$ ; la relation dans $\mathbb{Z}$ : $x_2 - x_1 \in a\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on étudiera l'anneau $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ ; on signalera l'existence éventuelle de diviseurs de zéro.

La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ suppose le diviseur strictement positif, elle introduit un quotient et un reste, le reste étant positif ou nul ; les propriétés des restes sont liées à l'étude des congruences ; en application des congruences et des systèmes de numération, on pourra énoncer les caractères usuels de divisibilité, (par 2, 9, 5, 3 dans le système décimal).

**Sont hors du programme les notions d'idéal et de treillis.**

## II Nombres réels, calcul numérique, nombres complexes

**§ 1** Toute construction, ou partie de construction, de $\mathbb{R}$ est hors du programme ; on énumérera seulement les propriétés admises de $\mathbb{R}$, par exemple :

a) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné ;

b) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels étant un sous-corps des éléments $x$ de $\mathbb{R}$ tels qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, satisfaisant à $p = qx$ ;

c) toute partie $A$ non vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure, ou plus petit majorant, notée sup$(A)$. (Quand sup$(A)$ appartient à $A$, c'en est le plus grand élément).

d) $\mathbb{R}$ est muni d'une valeur absolue, $|x| = \sup\{x; -x\}$.
À cette valeur absolue est associée une distance dans $\mathbb{R}$ :

$$(x, y) \mapsto \mathrm{d}(x, y) = |x - y|,$$

la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ est l'intervalle $]a - r; a + r[$.

Dans les classes antérieures, les notations $\infty$, $+\infty$, $-\infty$ ont déjà été utilisées à propos de recherches de limites et pour désigner des intervalles, mais en évitant soigneusement toute locution, toute écriture pouvant susciter une confusion de ces symboles avec des éléments de $\mathbb{R}$. Des professeurs pourront souhaiter, sans que ce soit imposé par le programme, introduire la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Cette introduction offre certains avantages, notamment dans la présentation des notions de continuité et de limite (une fonction numérique devenant alors une application d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$), mais présente aussi des dangers. Aussi, lorsqu'elle est jugée opportune, devra-t-elle être faite avec soin.

$\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné ainsi défini :

a) tout élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est, soit un élément de $\mathbb{R}$, soit l'un des deux éléments supplémentaire, provisoirement notés $\alpha$ et $\beta$.

b) La relation d'ordre , notée $\preceq$, entre élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est elle que :
- pour tous $x$ et $y$ appartenant à $\mathbb{R}$, la relation $x \preceq y$ équivaut à la relation $x \leqslant y$,
- pour tout $x$ appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, on a : $\alpha \preceq x$ et $x \preceq \beta$.

Les éléments $\alpha$ et $\beta$ sont plus usuellement notés $-\infty$ et $+\infty$, la notation $\preceq$ est remplacée sans inconvénient par $\leqslant$. Enfin la relation $x < y$ signifie dans $\overline{\mathbb{R}}$, comme dans $\mathbb{R}$, $x \leqslant y$ et $x \neq y$ ; par exemple $\dfrac{2}{3} < +\infty$

Le symbole $\infty$ ne représente aucun élément de $\overline{\mathbb{R}}$.Dans ces conditions, toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ a une borne supérieure et une borne inférieure. On appelle intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ tout sous-ensemble ayant l'une des quatre formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{fermé} &: [a, b] = \{x, x \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leqslant x \leqslant b\} ;\\
\text{semi-ouvert} &: [a, b[ = \{x, x \in \overline{\mathbb{R}},\ a \leqslant x < b\} ;\\
\text{semi-ouvert} &: ]a, b] = \{x, x \in \overline{\mathbb{R}},\ a < x \leqslant b\} ;\\
\text{ouvert} &: ]a, b[ = \{x, x \in \overline{\mathbb{R}},\ a < x < b\} ;
\end{aligned}$$

On a alors $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$ ; l'ensemble vide est un intervalle particulier. L'intersection de deux intervalles est un intervalle ; un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'intersection de $\mathbb{R}$ et d'un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $p$ et $q$ sont deux éléments d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, alors l'intervalle fermé $[p, q]$ est inclus dans $I$ ; réciproquement, est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie $E$ de $\overline{\mathbb{R}}$ telle que, quels que soient les deux éléments $x$, $y$ de $E$ avec $x \leqslant y$, l'intervalle fermé $[x, y]$ de $\overline{\mathbb{R}}$ soit inclus dans $E$. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, comme dans $\mathbb{R}$, cette propriété caractérise les intervalles.

Un tel prolongement de $\mathbb{R}$ donne beaucoup de simplicité et d'unicité à certaines présentation (voir III 1-2). Mais il importera de signaler explicitement que les opérations qui font de $\mathbb{R}$ un corps ne se prolongent pas à $\overline{\mathbb{R}}$, et les professeurs ne tolèreront aucun abus décriture à ce sujet ( par exemple $\dfrac{1}{+\infty} = 0, \dots$ )

**§ 2** Les éléments $x$ de $\mathbb{Q}$ tels qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant à $p = 10^n x$, forment l'anneau des nombres décimaux.

Étant donnés un réel $x$ et un entier naturel $n$, soient $p_n$ et $p'_n = p_n + 1$ les entiers consécutifs appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $p_n \leqslant 10^n x < p'_n$ ; par convention d'usage, les nombres $d_n = \dfrac{p_n}{10^n}$ et $e_n = \dfrac{p'_n}{10^n}$ sont appelés les valeurs décimales approchées de $x$ à $\dfrac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès. On en déduira la représentation, en général unique, d'un nombre réel par un développement décimal illimité ; est hors du programme l'étude systématique de la "périodicité" d'un tel développement pour un rationnel.

Plus généralement, dans les calculs numériques sur les nombres réels, on est amené à encadrer un réel par deux nombres autres que ceux qui ont été précisés ci-dessus. On y utilise la notion d'incertitude : $x$ étant un nombre réel, on appelle incertitude absolue sur $x$ par rapport à $a$ un majorant connu de $|x - a|$ et incertitude relative, pour $x \neq 0$, un majorant connu de $\left|\dfrac{x-a}{x}\right|$, on justifiera à l'aide d'encadrements les règles pratiques de calcul sur les incertitudes.

**§ 3 Nombres complexes.** En suivant l'ordre du programme, on peut rappeler d'abord (cf. programme de Première), à partir des applications linéaires, la définition des matrices $2 \times 2$ et leurs propriétés acquises (produit, déterminant) définir ensuite la somme de deux matrices $2 \times 2$ et le produit d'une matrice $2 \times 2$ par un réel. On démontrera que l'ensemble des matrices $2 \times 2$ forme d'une part un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, d'autre part un anneau (non commutatif).

Plus particulièrement, les matrices de la forme $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ constituent un corps commutatif $\mathbb{C}$, appelé le corps des nombres complexes.

Le sous-corps des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ peut être identifié au corps $\mathbb{R}$, une telle matrice peut être notée $a$.

Les matrices $z$ constituent d'autre part un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension deux, dont on convient de choisir une fois pour toute la base :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \quad \text{notée } (1\,, i)$$

On obtient alors au moyen de la base $(1\,, i)$ la forme cartésienne $z = a + ib$.

Le nombre $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé le module de $z$, $r = |z|$ . Supposant $r \neq 0$ et posant $\dfrac{a}{r} = a'$, $\dfrac{b}{r} = b'$, la matrice $\dfrac{z}{r} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ où $a'^2 + b'^2 = 1$, est la matrice d'une rotation vectorielle $\varphi$ étudiée en Première ; $\varphi$ est appelé l'argument de $z$ et on écrit $\varphi = \arg z$ ; on a alors $a' = \cos\varphi$, $b' = \sin\varphi$ et la forme trigonométrique $z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$.

L'emploi de la surjection $\theta$ décrite en Première permet d'écrire $z = r(\cos x + i\ \sin x)$ ; par abus de langage, on appelle aussi couramment argument de $z$, et on notera $\arg z$ , l'un des nombres $x$.

A l'occasion de l'étude des nombres complexes, par exemple, pourront être définies en terminale C les notions d'isomorphisme, d'homomorphisme et de noyau d'un homomorphisme. Soient $E$ et $F$ deux ensembles, munis respectivement des lois internes $\top$ et $\bot$ ; on dit qu'une application $f$ de $E$ dans $F$ est un homomorphisme de $(E, \top)$ dans $(F, \bot)$ pour dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E \times E, \;\; f(x_1 \top x_2) = f(x_1) \bot f(x_2).$$

Si $(E, \top)$ et $(F, \bot)$ sont deux groupes, d'éléments neutres $e$ et $e'$, $f$ est un homomorphisme de groupe ; alors l'image $f(E)$ est un sous-groupe de $F$ ; le noyau de $f$, ensemble des éléments $x$ de $E$ tels que $f(x) = e'$, est un sous-groupe de $E$. Sont hors du programme les notions de sous-groupe distingué et de groupe-quotient.

Une bijection, $f$, telle que $f$ et $f^{-1}$ sont des homomorphismes, est un isomorphisme de $E$ sur $F$ le noyau de $f$ est $e$. Si $E = F$, la bijection $f$ est un automorphisme de $E$.

Bien entendu, ces définitions ne feront pas l'objet d'un enseignement systématique et, avant d'être utilisées en toute circonstance dans la suite du programme, elles seront présentées d'abord sur des exemples simples tels que les suivants :

- l'application qui à tout nombre complexe $z = a + i\,b$ associe le nombre complexe conjugué $\overline{z} = a - i\,b$ $(z\overline{z} = r^2)$ est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ ;
- l'application qui à tout nombre complexe non nul $z$ associe son module $r$ est un homomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}_+, \times)$ ; le noyau de cet homomorphisme est le groupe multiplicatif $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes $\zeta$ de module 1 ;
- l'application qui à toute rotation vectorielle $\varphi$ associe $\zeta = \cos\varphi + i\ \sin\varphi$ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{R}, \circ)$ sur $(\mathcal{U}, \times)$ ;
- l'application qui à tout réel $x$ associe $\zeta = \cos x + i\ \sin x$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{U}, \times)$, dont le noyau est le sous-groupe additif $2\pi\,\mathbb{Z}$.

**§ 4 Application à la trigonométrie.** Ce dernier homomorphisme donne lieu à des calculs simples, qui peuvent être détaillés comme il suit :

$$\zeta = \cos x + i\,\sin x, \quad \overline{\zeta} = \cos x - i\,\sin x, \quad (\zeta\overline{\zeta} = 1)$$

donne pour $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta^n = \cos nx + i\,\sin nx$, $\overline{\zeta^n} = \cos nx - i\,\sin nx$ (Moivre) et $\cos nx = \dfrac{1}{2}\left(\zeta^n + \overline{\zeta^n}\right)$, $\sin nx = \dfrac{1}{2i}\left(\zeta^n - \overline{\zeta^n}\right)$, ce qui permet d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ sous forme de polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.

Inversement, tout "polynôme trigonométrique", somme de produits de la forme : $A\cos\alpha_1 x.\cos\alpha_2 x...\cos\alpha_h x.\sin\beta_1 x.\sin\beta_2 x...\sin\beta_k x$, et les $\alpha$ où les $\beta$ sont entiers, peut être mis sous la forme d'un polynôme du premier degré par rapport aux puissances de $\zeta$ et de $\overline{\zeta}$, donc, en définitive, sous forme de somme de cosinus et de sinus des multiples de $x$.

Les élèves doivent être familiarisés avec les calculs classiques sur les fonctions circulaires ; ils doivent savoir utiliser les transformations précédentes dans des calculs de dérivées ou de primitives.

**Mais, est hors du programme toute généralité sur les questions précédentes, par exemple les propriétés de certains coefficients ou l'unicité de l'expression du premier degré d'un polynôme trigonométrique.**

Dans la recherche des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe, on est amené à étudier d'abord le cas d'un nombre complexe de module 1 ; la définition d'une racine primitive de l'unité est hors du programme. Les élèves doivent savoir trouver la forme cartésienne des racines carrées d'un nombre complexe donné lui-même par sa forme cartésienne.

Le symbole $\sqrt{x}$ a été défini en Seconde pour $x$ réel positif ou nul ; on peut donc l'utiliser ici pour un module, mais il n'est pas possible d'utiliser ce symbole pour $x$ complexe.

**Remarques :**

1) Le professeur pourra, s'il le préfère, donner tout autre mode de définition, algébrique ou géométrique, des nombres complexes ; dans ce cas, il fera connaître l'isomorphisme entre le corps ainsi constitué et le corps $\mathbb{C}$ des matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

2) La bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sera interprétée comme associant à $z$ un vecteur-image (plan vectoriel euclidien) et un point-image (plan affine euclidien) ; $z$ est l'affixe du vecteur ou du point. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ peuvent être interprétées, soit dès à présent, soit lors de l'étude des similitudes planes (ch. VII, 2).

# III Calcul différentiel

Pour toutes les fonctions $f$ que concerne l'étude suivante, l'ensemble de départ $D_f$ est une partie de $\mathbb{R}$, les intervalles $I$ utilisés sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et dans les paragraphes 1, 2, 3, $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**§ 1 et 2 Limite et continuité** Les notions de limite et de continuité ont été étroitement liées dans l'histoire et les professeurs les présenteront dans l'ordre qu'ils préféreront. S'ils commencent par la continuité, ils seront amenés à définir, pour une fonction numérique $f$ dont l'ensemble de définition $D_f$ contient $a$, la continuité en $a$ : pour tout intervalle ouvert $I$ contenant $f(a)$, il existe un intervalle ouvert $J$ (dépendant de $I$) contenant $a$, tel que pour tout $x \in D_f \cap J$ l'on ait $f(x) \in I$. Si $D_f$ est inclus dans $\mathbb{R}$, il est équivalent de dire que, quel que soit $\epsilon$ strictement positif, il existe $\alpha$ strictement positif tel que $\mathrm{d}(a, x) < \alpha$ entraîne $\mathrm{d}[f(a), f(x)] < \epsilon$.

On définira aussi la continuité à gauche et à droite en un point.

On admettra la continuité de la composée de deux fonctions continues, et, si les deux fonctions $f$ et $g$ sont continues en un point $a$, la continuité de leur somme, de leur produit, de leur quotient $\dfrac{f}{g}$ pour $g(a) \neq 0$. Quelques démonstrations simples pourront servir d'exemples, mais elles ne sauraient être demandées, même à titre d'exercices, au baccalauréat.

Soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$ ; si $f$ est continue en tout point de $I$, on dit que $f$ est continue sur I.

A) Si la fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$ (ouvert ou fermé), l'image $f(I)$ de $I$ par $f$ est un intervalle, ce qui équivaut à dire que, quels que soient $a$ et $b$ éléments de $I$, tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est une valeur prise par $f$ (ce résultat est connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires).

B) Si la fonction $f$ est continue sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$, $f(I)$ est un intervalle fermé borné, cet énoncé a pour conséquence l'existence d'un maximum et d'un minimum pour l'ensemble des valeurs de $f$ sur $I$.

Les théorèmes A) et B) ne peuvent être démontrés à ce niveau ; on les illustrera par des figures convenables et on remarquera que le premier est d'un usage plus fréquent que le second.

Du théorème A) on déduit que si $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, $f$ admet une fonction réciproque strictement monotone sur $f(I)$ ; on admettra la continuité de cette fonction réciproque.

**Sont hors du programme :**

- **les notions de voisinage et d'ensemble ouvert,**
- **la notion de filtre,**
- **la définition de la continuité uniforme.**

Une définition de "$f$ admet une limite $\ell$ quand la variable tend vers $a$" est "il existe un nombre $\ell$ tel que soit réalisée la propriété suivante : pour tout intervalle ouvert $I$ contenant $\ell$, il existe un intervalle ouvert $J$ (dépendant de $I$) contenant $a$, tel que pour tout $x \in D_f \cap J$ et $x \neq a$, l'on ait $f(x) \in I$.

Il est équivalent de dire que, quel que soit $\epsilon$ strictement positif, il existe $\alpha$ strictement positif tel que :

$$0 < \mathrm{d}(a, x) < a \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{d}[\ell, f(x)] < \epsilon.$$

On peut aussi dire alors "$f$ admet la limite $\ell$ au point $a$".

On pourra utiliser l'une ou l'autre des notations :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = \ell$$

La définition précédente s'étend commodément, en modifiant les définitions de $I$ et de $J$ au cas où $a$, ou bien $\ell$, serait infini.

Lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures à $a$ (resp. lorsque $x$ tend vers $+\infty$), on pourra, si l'on introduit la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, utiliser la notation :

$$\lim_{a^+} f = +\infty \quad (\text{resp.} \ \lim_{+\infty} f = +\infty)$$

Que $f$ soit ou non définie en $a$, si $f$ admet en ce point une limite finie $\ell$, $\ell$ est la valeur qu'il conviendrait d'attribuer à $f$ en $a$ "pour la rendre continue en ce point" c'est-à-dire pour associer à $f$ une fonction $g$ prenant en tout point de $D_f$ autre que $a$ la même valeur que $f$, et en $a$ la valeur $\ell$, $g$ est ainsi continue en $a$.

L'étude de certaines suite peut être traitée ici en application des notions générales sur les fonctions et sur les limites ; en particulier, lorsqu'une suite $(u_n)$ est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction connue $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$, $u_n = f(n)$, son étude peut résulter de l'étude complète de $f$, ou parfois au contraire la préparer, il est ainsi des suites arithmétiques et géométriques, prévues au V. 5.

**§ 3 Dérivation.** La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la variation d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ est l'ensemble des points M du plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient la relation $y = f(x)$, le paramètre de chaque point étant son abscisse. Ce paramétrage imposé évite toute difficulté dans la définition d'une tangente ou d'une asymptote à $\mathcal{C}$, car il permet de définir avec précision l'expression "quand $t$ tend vers $t_0$, la droite variable D($t$) passant par un point fixe ou de direction fixe a pour limite la droite $\Delta$"

La démonstration du théorème relatif à la dérivation de la fonction composée $F = f \circ \varphi$ de deux fonctions dérivables n'offre pas de difficulté si l'on utilise la notion de fonction linéaire tangente.

Le programme demande d'admettre que si une fonction $f$, dérivable sur un intervalle $I$, a sur $I$ une dérivée positive ou nulle, elle est croissante au sens large sur $I$ ; on en déduit que :

a) si $f$ admet une dérivée constamment nulle sur $I$, $f$ est constante sur I ;
b) si deux fonctions dérivables sur un même intervalle $I$ ont leurs dérivées égales sur $I$, leur différence est une fonction constante sur $I$.

Les mots usuels de maximum et de minimum d'une fonction peuvent avoir un sens global ou un sens local ; on le précisera dans ce dernier cas. On apprendra aux élèves, sur des exemples, à utiliser certaines propriétés d'invariance de la représentation graphique d'une fonction (translation, symétrie).

Il est indispensable que les élèves d'une section terminale scientifiques sachent étudier de façon sûre et prompte des fonctions données par des expressions simples : quotient de deux fonctions polynômes, fonctions circulaires, fonctions logarithmes et exponentielles, ainsi que des composées de ces diverses fonctions.

Cette étude comporte, bien entendu, celle des limites aux bornes des intervalles de définition, sous la réserve apportée au V.5 et 6, pour les fonctions logarithmes et exponentielles.

**Sont hors du programme le théorème de Rolle et la formule des accroissements finis.**

**§ 4 Fonctions vectorielles d'une variable réelle.** Les notions élémentaires sur la continuité et les limites des fonctions vectorielles $\overrightarrow{f}$ d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel euclidien $E$ ont trait aux définitions, que l'on peut calquer sur celles qui ont été données pour les fonctions numériques.

La démarche suivante peut être utilisée :
Soit $x_l, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de $\overrightarrow{f}(t)$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel euclidien $E$.

$$\sup_{(i)}|x_i| < \left\|\overrightarrow{f}(t)\right\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{n}\sup_{(i)}|x_i|$$

La double inégalité précédente permet de justifier l'équivalence logique des énoncés suivants :

"$(x_1, \ldots x_n)$ a pour limite (0,. . .,0) quand $t$ tend vers $a$",
"$\left\|\overrightarrow{f}(t)\right\|$ a pour limite 0 quand $t$ tend vers $a$".

La norme de $\overrightarrow{f}(t)$ étant indépendante du choix de $\mathcal{B}$, le fait, que les coordonnées de $\overrightarrow{f}(t)$ dans $\mathcal{B}$ aient simultanément pour limite zéro quand $t$ tend vers $a$ est indépendant du choix de $\mathcal{B}$. Le théorème précédent pourra être admis.

En conséquence on pourra dire que $\overrightarrow{f}$ a pour limite $\overrightarrow{\ell}$ quand $t$ tend vers $a$ , lorsque, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, chacune des applications coordonnées de $\overrightarrow{f}$ admet une limite.

On justifiera, sans s'y attarder, le calcul des dérivées.

L'étude d'une application $f : t \longmapsto \mathrm{M}(t)$ à valeurs dans un espace affine euclidien contenant O se ramène à celle de l'application $t \longmapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$, les limites et dérivées de $f$ étant indépendantes de O.

L'emploi de la dérivation vectorielle pour la recherche (existence et détermination) de la tangente à une courbe concerne explicitement les coniques (définition bifocale et monofocale), ainsi que l'hélice circulaire (définie à cette occasion) ; il est utile d'interpréter d'abord la dérivée de $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \rho\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est unitaire, tant pour la recherche précitée que pour la cinématique visée au § 5.

**§ 5 Cinématique.** La cinématique, comme le paragraphe 4 ci-dessus, sera présentée le plus tôt possible dans l'année, en liaison avec l'enseignement donné en physique. Le physicien et le mathématicien ont, à son égard, des attitudes complémentaires, la cinématique étudiée en mathématiques étant un modèle de la cinématique classique de la physique. Un intervalle de temps est un intervalle de $\mathbb{R}$ et l'espace un espace affine euclidien $E_3$ de dimension trois. Dans ces conditions,

le mouvement d'un point est une application deux fois dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $E_3$.

La physique utilisera selon ses besoins les notions élaborées par les mathématiques.

Si la donnée est d'abord celle d'une courbe $\mathcal{C}$, représentée dans $E_3$ au moyen d'un paramètre $u$, un mouvement sur cette courbe peut être alors déterminé par la donnée d'une application $t \longmapsto u(t)$, telle que la condition de double dérivabilité soit satisfaite.

Le vecteur-vitesse est un vecteur (dépendant d'ailleurs de l'unité de temps) ; on ne le confondra pas avec son représentant privilégié, dont l'origine est la position du mobile à l'instant donné ; il en est de même du vecteur-accélération.

La notion de mouvement projeté peut être commode dans certain cas, par exemple pour l'étude du mouvement oscillatoire simple.

## IV Calcul intégral

**§ 1 Intégrale de Riemann.** Dans les programmes antérieurs, la notion d'intégrale était introduite après celle de primitive et sa signification physique n'était donnée que dans un cas particulier, celui du calcul des aires. Il a paru préférable de l'introduire désormais à partir de l'interprétation concrète qu'en donnent les valeurs approchées dites sommes de Riemann.

On pourra suivre l'exposé classique de la théorie de Riemann pour une fonction monotone. Mais on pourra aussi mettre à profit les fonctions en escalier abordées dès la classe de Seconde ; on étudiera l'intégrale des fonctions en escalier sur $[a, b]$, puis on en déduira celle des fonctions monotones, enfin on formulera pour les fonctions continues les résultats analogues que l'on admettra.

**A. Fonctions en escalier.** On a dit (programme de Seconde) qu'une fonction $f$ définie sur $[a, b]$ est en escalier s'il existe une suite finie $x_0 = a, x_l, \dots x_{n-1}, x_n = b$, de nombres croissants, telle que $f$ prenne sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ une vaieur constante $\mu_i$ ; la valeur $f(x_i)$ n'est pas liée à $\mu_i$ et $\mu_{i+2}$.

Par définition, l'intégrale de la fonction en escalier $f$ sur $[a, b]$ est le réel défini et noté comme il suit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\mu_i \quad x \text{ étant une variable muette}$$

On obtient la même intégrale pour une fonction en escalier $g$ obtenue en changeant la valeur de $f$ en l'un de ses points, et donc en un nombre fini de ses points.

On démontrera les quatre propriétés suivantes :

a) les fonctions en escalier sur $[a, b]$ constituent un espace vectoriel $E$ (Cf. Seconde) sur $\mathbb{R}$ ;

b) forme linéaire ; on a :

$$\forall f \in E,\ \ \forall g \in E,\ \ \int_a^b [f+g](x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\forall f \in E,\ \ \forall k \in \mathbb{R},\ \ \int_a^b [kf](x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ : $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc une forme linéaire sur $E$

c) comparaison des intégrales ; la forme linéaire précédente est croissante : si $f \in E$, et si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) > 0$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0, \quad \text{d'où}$$

si $f \in E$ et $g \in E$, et si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

d) relation de Chasles ; elle est une conséquence de l'additivité :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

cette relation reste valable quelque soit l'ordre de grandeur de $a$, $b$, $c$, si $f$ est en escalier sur le plus petit intervalle contenant à la fois $a$, $b$, $c$, et si l'on écrit pour $a > b$ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

**B. Extension.** Envisageons maintenant une fonction $f$ définie sur $[a,b]$,non plus en escalier mais pour laquelle il. existe deux réels fixes $A$ et $B$ tels que :

$$\forall x \in [a,b] \;\; A \leqslant f(x) \leqslant B$$

Soit $\Phi$ l'ensemble des fonctions en escalier $\varphi$ (parmi lesquelles $x \mapsto A$), telles que : $\forall x \in [a,b] \;\; \varphi(x) \leqslant f(x)$ ;
soit $\Psi$ l'ensemble des fonctions en escalier $\psi$ (parmi lesquelles $x \mapsto B$), telles que : $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) \leqslant \psi(x)$ ;
on en déduit : $\forall x \in [a,b]$ , $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ quels que soient $\varphi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ ;
la borne supérieure $U$ des intégrales $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et la borne inférieure $V$ des intégrales $\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$ vérifient $U \leqslant V$.
On démontrera que, pour $f$ monotone croissante, $U = V$ ;
si, en effet, l'on se donne une subdivision de $[a,b]$, $x_0 = a, x_1 \ldots x_{n-1}, x_n = b$, avec $x_{i-1} < x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots n$, il existe des fonctions en escalier $\psi$ telles que :

$$\forall x \in ]x_{i-1}, x_i[, \;\; \varphi(x) = f(x_{i-1}) \;,\; \psi(x) = f(x_i)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum \Big[f(x_i) - f(x_{i-1})\Big]\,(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant [f(b) - f(a)] \max_{(i)}(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

et les inégalités $0 \leqslant V - U \leqslant [f(b) - f(a)] \max\limits_{(i)}(x_i - x_{i-1})$ entraînent $U = V$

Par définition, l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ est $U = V$, notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. L'application $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se trouve donc étendue aux fonctions monotones croissantes et, d'une façon analogue, aux fonctions monotones décroissantes.

Soit, plus généralement, l'ensemble $\mathcal{J}$ des fonctions $f$ telles que $U = V$ ; on démontre, et ce sera admis en classe terminale, qu'outre les fonctions monotones, appartiennent aussi à $\mathcal{J}$, en particulier, les fonctions continues, les fonctions monotones ou continues par morceaux ; pour ces fonctions aussi, l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ est définie et sera notée par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = U = V$.

Bien que les résultats suivants, extension des résultats énoncés sous les mêmes lettres pour des fonctions en escalier, soient d'une démonstration aisée, on pourra les admettre ici :

a) $\mathcal{J}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ;

b) l'application de $\mathcal{J}$ dans $\mathbb{R}$ : $f \longmapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $\mathcal{J}$

c) si $f \in \mathcal{J}$ et $g \in \mathcal{J}$, et si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) < g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ ; il en résulte, en particulier, que : si $f \in \mathcal{J}$ et s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x)| \leqslant M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = M(b-a)$ ;

d) **la formule de Chasles.** Pour $f \in \mathcal{J}$, une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est donnée par la somme $\sum(x_i - x_{i-1})f(\zeta_i)$ pour une subdivision quelconque $x_0 = a$, $x_l$, ... $x_{n-1}$, $x_n = b$ de $[a, b]$ et pour un choix quelconque de $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ une telle somme est appelée somme de Riemann.

Si l'on partage, en particulier, $[a, b]$ en $n$ intervalles égaux de longueur $h = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ et si l'on prend $\zeta_i = x_{i-1} = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n}$, la somme de Riemann précédente s'écrit :

$$(b-a) \times \frac{f(a) + f\left(a + \dfrac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left[a + (n-1)\dfrac{b-a}{n}\right]}{n}$$

elle définit une fonction de l'entier $n$ qui a pour limite $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n$ tend vers infini (propriété démontrée pour une fonction monotone, admise pour une fonction continue) ; le libellé d'exercices relatifs à la recherche de telles limites devra toujours rendre apparent un choix de $f$ et de $[a, b]$.

Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé valeur moyenne de la fonction $f$ sur $[a, b]$ ; il est compris entre tout minorant et tout majorant de $f$ sur $[a, b]$. Si $f$ est une fonction continue ; et en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe dans $]a, b[$ un nombre $c$ au moins tel que cette valeur moyenne soit $f(c)$ (formule de la moyenne).

Supposons $f$ **continue** sur $[a,b]$ soient $\alpha$ un réel de $[a,b]$ et $G$ la fonction définie par : $G(x) = \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$.

$x_0$ et $x_0+h$ appartenant à $[a,b]$, on a $G(x_0+h) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$, $hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t$ d'où par soustraction $G(x_0+h) - G(x_0) - hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,\mathrm{d}t$.

Lorsque $t$ varie de $x_0$ à $x_0+h$, $|f(t) - f(x_0)|$ est borné supérieurement ; il existe un nombre $\omega(h)$ tel que $\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0]\,\mathrm{d}t = h\,\omega(h)$ avec $|\omega(h)| < \sup|f(t) - f(x_0)|$.

La fonction $f$ étant continue, quand $h$ tend vers zéro, $\sup|f(t) - f(x_0)|$ et par conséquent $\omega(h)$ tendent vers zéro.

On en déduit que $G$ est dérivable au point $x_0$, et a pour dérivée $f(x_0)$.

Toute fonction $f$ continue sur $[a,b]$ admet donc des primitives, et si $F$ est l'une d'elles $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

La notation traditionnelle $\int f(x)\,\mathrm{d}t$ pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction $f$ présente des inconvénients, et il vaut mieux l'éviter. Chacune des primitives de la fonction $f$ continue sur l'intervalle $I$ se note :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \quad a \in I \text{ et C un nombre réel quelconque}$$

Les élèves doivent connaître les primitives qui résultent "à vue" des formules connues de dérivation des fonctions usuelles, en particulier celles de $(x-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. On déduira du calcul des dérivées la formule dite d'intégration par parties :

$$\int_a^x u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_0^x - \int_a^x v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t$$

**Sont hors du programme :**

- la formule dite d'intégration par changement de variable.
- toute étude de la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

**§ 2 Aires.** Dans le nouveau programme, comme dans l'ancien, une "théorie des ensembles quarrables" est à exclure. Il est seulement demandé de savoir que, dans un plan affine euclidien, il existe une famille d'ensembles de points, dits ensembles quarrables, tels qu'on peut définir une application $\mathcal{A}$ , dite aire, de cette famille dans $\mathbb{R}_+$, jouissant notamment des propriétés suivantes :

a) Si $E_1$ et $E_2$ sont des ensembles quarrables ,
   - leur réunion et leur différence le sont :
   - on a : $E_1 \cap E_2 = \varnothing \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{A}(E_1) + \mathcal{A}(E_2)$,
     ce qui entraîne $E_1 \subset E_2 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(E_1) \leqslant \mathcal{A}(E_2)$.

b) Si $E$ est quarrable, tout transformé $E'$ de $E$ par isométrie est quarrable, et on a : $\mathcal{A}(E') = \mathcal{A}(E)$.

c) L'ensemble $K$ des points $\mathrm{M}(x, y)$ définis dans un repère orthonormé par : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$ est quarrable et son aire est $\mathcal{A}(K) = ab$.

Le nombre $\mathcal{A}(E)$ est désigné souvent par "aire de $E$".

On admettra enfin que, $f$ étant une fonction positive, monotone sur $[a, b]$ ou plus généralement telle que $f \in \mathcal{J}$, l'ensemble $E$ des points $\mathrm{M}(x, y)$ définis dans un repère orthonormé par $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est quarrable ; le problème est d'exprimer $\mathcal{A}(E)$.

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions en escalier telles que : $\forall x \in [a, b]\ \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ ; les ensembles $E'$ et $E''$ analogues à $E$ et relatifs à $\varphi$ et $\psi$ sont quarrables et d'aires $\mathcal{A}(E') = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathcal{A}(E'') = \displaystyle\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout choix $\varphi$ et $\psi$ ; $\mathcal{A}(E)$ est donc l'unique réel compris entre l'ensemble des $\mathcal{A}(E')$ et l'ensemble des $\mathcal{A}(E'')$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(E) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On pourrait, pour une fonction continue sur $[a, b]$, retrouver ce résultat par un raisonnement classique utilisant la dérivée par rapport à $x$ de $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cas où, $f$ gardant un signe constant, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est négatif, l'aire de l'ensemble plan correspondant est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
cependant, en mécanique et en physique, il est utile dans certaines représentations graphiques d'interpréter l'intégrale elle-même comme définissant une "aire algébrique", l'application se faisant alors dans $\mathbb{R}$ et non pas seulement dans $\mathbb{R}_+$.

**§ 3** L'espace affine euclidien étant un modèle du monde physique, on appliquera le calcul intégral à l'évaluation des volumes, des masses, des moments d'inertie, à partir de formules qu'on présentera de façon intuitive, sans soulever de difficultés théoriques.

Une fonction $f$ étant périodique, de période $T$, on appelle valeur efficace de $f$ le nombre positif $\mu$ défini par :

$$\mu^2 = \int_\alpha^{\alpha+T} f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Il ne dépend pas de $\alpha$ car, si $F$ est une primitive de $f^2$, $\varphi(\alpha) = F(\alpha + T) - F(\alpha)$ a une dérivée nulle par rapport à $\alpha$. Bien entendu, si pour tout $x$, $|f(x)|$ est compris entre $m$ et $M$, alors $\mu$ est lui-même compris entre $m$ et $M$. Les élèves en rencontreront des exemples dans l'étude des courants alternatifs.

## V Exemples de fonctions numériques d'une variable réelle

Que ce catalogue soit donné au chapitre V ne signifie pas, bien au contraire, que le professeur doive attendre jusqu'ici pour étudier systématiquement, l'une après l'autre, les diverses fonctions énumérées ; il trouvera le plus souvent avantage à les introduire dans les chapitres III et IV pour illustrer au plus tôt d'exemples les questions théoriques qui font l'objet de ces chapitres et pour familiariser ainsi

les élèves avec l'application des théorèmes généraux à toutes les fonctions du programme.

Pour $x > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$, la définition de $\sqrt[q]{x}$ résulte de l'existence d'une fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto x^q$.

**§ 1 et 2** Pour $x > 0$ et $r = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$, $x^r$ pourra être défini comme égal à $\sqrt[q]{x^p}$ (cette notation, si elle est utilisée pour $x < 0$, est un abus d'écriture qui présente des dangers).

**§ 3** L'étude des suites arithmétiques et géométriques, déjà mentionnées au III 1°et 2°, peut être menée de façon parallèle (Cf, programme de Seconde C).
On évaluera la somme des $n$ premiers termes et on l'étudiera quand $n$ devient infini ; quant au résultat lui-même, concernant une suite géométrique :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \frac{1}{q-1} \quad \text{si } |q| < 1$$

les élèves doivent savoir le rétablir promptement, ils peuvent aussi l'utiliser de mémoire, sans autre justification, à l'écrit du baccalauréat.

Certaines des questions traitées restent valables pour une suite complexe, fonction complexe de la variable $n \in \mathbb{N}$ ; en particulier, l'étude d'une suite géométrique de raison $q = \cos\alpha + i\sin\alpha$, faite seulement à titre d'exercice, a son intérêt en trigonométrie.

**§ 4** L'étude des fonctions circulaires comporte une révision des formules établies en Première, d'addition, de transformation de produits de sinus et de cosinus en sommes, et inversement.

**§ 5 , 6 et 7** La fonction logarithme népérien sera définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\text{Log}\,x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ ; la fonction exponentielle sera obtenue comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. On justifiera les règles de calcul et l'isomorphisme ainsi établi entre le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ et le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+, \times)$.

Le programme précise les formes indéterminées, relatives à ces fonctions, que les candidats doivent savoir étudier. Toute autre recherche de limite ne peut être demandée au baccalauréat qu'en indiquant une méthode ; cette restriction ne concerne pas les limites qui découlent , sans transformation intermédiaire, de la notion de dérivée, telles que les limites de $\dfrac{\text{Log}(1+x)}{x}$ et de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ quand $x$ tend vers zéro.

La notation $e^{ix}$ pour désigner $\cos x + i\sin x$ permet de retrouver facilement des formules de trigonométrie, elle rendra service dans l'étude des phénomènes vibratoires ; mais cette notation n'est pas imposée et ne peut faire l'objet de questions écrites ou orales au baccalauréat.

**§ 8** En Seconde et en Première, les élèves ont appris l'usage de la règle à calcul, ils doivent s'en servir avec aisance en classe terminale. Seules les techniques simples fournissant le carré ou la racine carrée d'un nombre donné, le produit ou le quotient de plusieurs nombres, éventuellement les cosinus et sinus, pourront être demandées au baccalauréat ; il n'est pas besoin pour cela de règles de spécialistes.

On pourra utiliser toute table numérique, carrés et cubes, racines carrées et cubiques, inverses, fonctions circulaires, logarithme népérien et exponentielle, ... L'emploi de telles tables et la construction de machines à calculer simples ont notablement réduit le rôle des tables de logarithmes décimaux ; ces dernières restent néanmoins un outil usuel et peu coûteux et le maniement des tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les fonctions circulaires devra être connu des élèves. On donnera une idée de l'imprécision des tables, mais aucun calcul d'erreur ne sera demandé au baccalauréat sur ce point.

L'emploi de machines à calculer de bureau, prévu par les programmes et les commentaires de Seconde et de Première, demeure des plus recommandables en classe terminale.

**§ 9** Toute généralité sur les équations différentielles est hors du programme. On désire seulement qu'en vue de la physique, les élèves sachent donner toutes les solutions des deux types d'équation explicitement indiquées dans cet alinéa.

## VI Éléments de géométrie affine et euclidienne

Dans ce titre VI, les énoncés de certaines définitions ou de certaines propriétés pourront avoir une forme générale ; mais les exemples et les applications respecteront les conditions "$n \leqslant 3$" et "corps de base $\mathbb{R}$" imposées par le programme.

**Sont hors programme les matrices dont l'une des dimensions est supérieure ou égale à trois, ainsi que les déterminants d'ordre égal ou supérieur à trois.**

**§ 1 Géométrie vectorielle.** Soient $E$ un espace vectoriel, $E_1$ et $E_2$ deux de ses sous-espaces vectoriels ; les vecteurs $\overrightarrow{Z}$

$$\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}, \quad \overrightarrow{X} \in E_1, \quad \overrightarrow{Y} \in E_2$$

forment un sous-espace vectoriel $E'$ de $E$. Si $E_1 \cap E_2 = \{\varnothing\}$, $E_1$ et $E_2$ sont dits deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E'$, $E'$ est dit somme directe de $E_1$ et $E_2$.

La définition d'une application linéaire $f$ d'un espace vectoriel $E$ dans un espace vectoriel $F$, déjà donnée en Seconde, sera reprise et enrichie d'exemples ; $f$ est un homomorphisme de $E$ dans $F$, on montrera que le noyau de $f$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que l'image de $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$ ; on vérifiera, pour $n \leqslant 3$, que la somme des dimensions du noyau de $f$ et de l'image $f(E)$ est égale à $n$, dimension de $E$.

Parmi les applications linéaires de $E$ dans $E$, on s'attachera aux automorphismes de $E$, applications linéaires bijectives de $E$ sur lui-même, c'est-à-dire dont le noyau se réduit $\{\varnothing\}$ ; ils forment un groupe, dit groupe linéaire de $E$ ; les homothéties

vectorielles en forment un sous-groupe commutatif et toute homothétie vectorielle commute avec toute application linéaire de $E$ dans $E$.

Pour préparer le VI 4°, il sera intéressant d'étudier dès maintenant les automorphismes involutifs d'un espace vectoriel $E$. Si $s$ est l'un d'eux dont on suppose l'existence et si à tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $E$ on associe les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{Y} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{X} + s(\overrightarrow{X})]. \quad \overrightarrow{Z} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{X} - s(\overrightarrow{X})]$$

alors $s(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{Y}$ ; $s(\overrightarrow{Z}) = -\overrightarrow{Z}$, $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$.
il en résulte que $E$ est la somme directe de deux espaces vectoriels supplémentaires $E'$ et $E''$, composés :

- pour $E'$, des vecteurs invariants par $s$,
- pour $E''$, des vecteurs changés par $s$ en leurs opposés.

Inversement, soient $E'$ et $E''$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$, dont les vecteurs sont notés $\overrightarrow{Y}$ pour $E'$ et $\vec{Z}$ pour $E''$. L'application $f$ qui à tout vecteurs $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ de $E$ associe le vecteur $f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{Y} - \overrightarrow{Z}$, est un automorphisme involutifs de $E$ laissant invariants les vecteurs $\overrightarrow{Y}$ de $E'$ et transformant les vecteurs $\overrightarrow{Z}$ de $E''$ en leurs opposés.

Dans le cas où $n = 3$, on trouve ainsi quatre types d'automorphismes involutifs :

a) $E' = E,\ E'' = \{\varnothing\}$ , $s$ est l'identité ;

b) $E'$ est un plan vectoriel, $E''$ est une droite vectorielle non incluse dans le plan ;

c) $E'$ est une droite vectorielle, $E''$ est un plan vectoriel n'incluant pas la droite ;

d) $E' = \{\varnothing\}$, $E'' = E$ , $s$ est l'homothétie vectorielle de rapport $-1$ ; les automorphismes involutifs des types b), c), d) peuvent être appelés symétries vectorielles.

Toute l'étude précédente peut être illustrée par des figures (cf, commentaire de Première, Cf introduction à la géométrie).

**§ 2 Géométrie affine.** Un rappel de Première concernera :

- la définition d'un espace affine ;
- la définition d'une variété affine (dans l'espace de dimension 3, il en existe cinq types, espace entier, plan, droite, point, ensemble vide), la définition de sa direction et celle de sa dimension ;
- l'intersection de deux variétés affines, qui est une variété affine ; l'étude du parallélisme.

Un repère **cartésien** est constitué par un point (origine) et une base de l'espace vectoriel associé ; un repère **affine** est un ensemble ordonné :

- Sur une droite, deux points distinct (dim 1) ;
- dans le plan trois points non alignés (dim 2) ;
- dans l'espace quatre points non coplanaires (dim 3).

L'étude du barycentre conduira à la détermination d'une variété de l'espace affine de dimension trois comme ensemble des barycentres des points d'un repère affine attaché à la variété lorsqu'on les affecte de coefficients convenables.

Mais est hors du programme la technique des coordonnées barycentriques.

**§ 3 Applications affines.** Par définition, $\mathscr{E}$ étant un espace affine et $E$ l'espace vectoriel associé, $f$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ s'il existe un point $\mathrm{M}_0$ de $\mathscr{E}$ tel que pour tout point M de $\mathscr{E}$ l'application $F$ de $E$ dans $E$ définie par $F(\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{M}_0)f(\mathrm{M})}$ soit une application linéaire ; on a alors :

$$\forall A \in \mathscr{E}, \ \forall B \in \mathscr{E}, \quad F(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$$

$F$ est appelée l'application linéaire associée à $f$.

Une application affine $f$ est déterminée par l'application linéaire associée $F$ et par le couple formé d'un point particulier et de son image.

On mettra en évidence la propriété du barycentre ; si M est barycentre de A, B, C, ... affectés des coefficients $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... alors $f$(M) est barycentre de $f$(A), $f$(B), $f$(C), ... affectés des mêmes coefficients, et réciproquement. (Si $f$(A) et $f$(B) sont confondus ce point sera affecté du coefficient $\alpha + \beta$).

Quelle que soit une application affine, l'ensemble de ses points invariants est une variété affine.

De nombreux exemples d'applications affines seront donnés et, en premier lieu, outre les applications constantes, celles qu'indique le programme :

- les translations, qui forment un groupe commutatif, et pour lesquelles l'application linéaire associée est l'identité ;
- les homothéties, et à ce propos un bon exercice peut consister à montrer que les applications du groupe homothéties-translations sont caractérisées, si $n \geqslant 2$, par le fait qu'elles transforment toute droite en une droite parallèle ;
- les projections : soient $\mathcal{T}$ une variété affine de direction $P$ et $D$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $P$ ; pour tout point M$\in \mathscr{E}$, la variété affine $\mathcal{T}$ et la variété affine contenant M et de direction $D$ ont pour intersection un point $m$. L'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathcal{T}$, M$\longmapsto m$, est affine, on l'appelle la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathcal{T}$ de direction $D$.
- les applications affines involutives : une telle application $f$ a au moins un point invariant, à savoir le milieu de AB, où $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A} = f(\mathrm{B})$ ; la classification antérieure des applications linéaires involutives donne alors, par exemples dans un espace affine de dimension 3, l'identité, la symétrie par rapport à un point, les symétries obliques par rapport à une droite ou un plan.

**Est hors du programme la propriété suivante caractéristique des applications affines : soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n \geqslant 2$ et $f$ une transformation de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire une bijection de $\mathscr{E}$ sur lui-même ; si, quels que soient les trois points alignés A, B, C de $\mathscr{E}$ leurs images $f$(A), $f$(B), $f$(C) sont aussi alignées, alors $f$ est une application affine.**

**§ 4 a) Transformations orthogonales.** La notion d'espace vectoriel euclidien, déjà entrevue en Seconde et présentée de façon générale en Première, n'a pas à être reprise encore une fois. Si $f$ est une application **linéaire** dans lui-même de l'espace vectoriel euclidien $E$, conservant la norme, c'est-à-dire telle que, pour tout $\overrightarrow{X}$, $\left\|f(\overrightarrow{X})\right\| = \left\|\overrightarrow{X}\right\|$, ce qui entraîne la conservation du produit scalaire, $f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$, $f$ est appelé transformation orthogonale, c'est un automorphisme de $E$. Ces automorphismes particuliers forment un groupe, par définition le groupe orthogonal $O(E)$.

Réciproquement, on montrera que si $f$ est une application de $E$ dans lui-même qui conserve le produit scalaire, elle est alors linéaire et est donc une transformation orthogonale (une démonstration, parmi d'autres, s'apparente à celle qui est présentée au § 5 pour les isométries).

**b) Transformations orthogonales involutives.** On utilisera l'étude des automorphismes involutifs d'un espace vectoriel, déjà faite au VI 1° : on montrera que tout vecteur de $E'$ est orthogonal à tout vecteur de $E''$ et donc, dans le cas de la dimension 3, les transformations orthogonales involutives sont l'identité, la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel ou à une droite vectorielle, l'homothétie vectorielle de rapport $-1$.

**c) Transformations orthogonales du plan vectoriel.** On a vu en Première que les transformations orthogonales du plan vectoriel forment un groupe $\mathcal{J}$ , non commutatif, pour la composition des applications ; l'ensemble de ces transformations se décompose en deux parties disjointes :

- le sous-groupe commutatif $\mathcal{R}$ des rotations vectorielles planes, dont les matrices dans une base orthonormée sont du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ; une rotation vectorielle plane, autre que l'identité, ne laisse invariant qu'un seul vecteur, le vecteur $\overrightarrow{0}$ .
- la famille $\mathcal{S}$ des transformations orthogonales planes associées aux matrices du type $s = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ ; on en fera l'étude, laissée de côté en Première ; chacune d'elles laisse invariants une infinité de vecteurs, ceux d'une droite vectorielle ; ce sont, au sens défini plus haut, les symétries orthogonales par rapport à une droite. $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{J}$ :

$$\text{si } S_1 \in \mathcal{S} \text{ et } S_2 \in \mathcal{S}\text{ , alors } S_2 \circ S_1 \in \mathcal{R};$$
$$\text{si } S \in \mathcal{S} \text{ et } R \in \mathcal{R}\text{ , alors } S \circ R \in \mathcal{S} \text{ et } R \circ S \in \mathcal{S}\text{ ;}$$

  toute rotation vectorielle plane est le produit de deux symétries vectorielles planes, dont l'une est d'ailleurs arbitraire.

**d) Classification, à l'aide de leurs invariants,** des transformations orthogonales de l'espace vectoriel euclidien $E$ de dimension 3. L'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs invariants étant un sous-espace vectoriel, quatre cas peuvent se présenter :

- $\mathcal{U} = E$, la transformation est l'identité.
- $\mathcal{U}$ est un plan vectoriel $P$. La droite vectorielle $D$ orthogonale à $P$ est globalement invariante ; le cas de l'identité étant écarté, tout vecteur $\overrightarrow{V}$ appartenant à $D$ est transformé en $-\overrightarrow{V}$ : la transformation est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel $P$.
- $\mathcal{U}$ est une droite vectorielle $D$. Le plan vectoriel $P$ orthogonal à $D$ est globalement invariant, mais il ne contient aucun vecteur invariant autre que $\overrightarrow{0}$ : la restriction à $P$ de la transformation considérée est une rotation vectorielle plane d'angle $\varphi$ non nul.

  Une transformation de ce type, dont les seuls éléments fixes sont ceux d'une droite vectorielle, est appelée rotation vectorielle ; cette rotation vectorielle peut être notée $(D, \varphi)$. La droite vectorielle $D$ et l'angle de la rotation vectorielle

plane $\varphi$ sont dits l'axe et l'angle de la rotation vectorielle considérée (exemple : la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle, appelée aussi demi-tour vectoriel, $\varphi$ étant alors l'angle plat). On convient de considérer l'identité comme la rotation vectorielle particulière d'angle nul.

- $\mathcal{U} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, exemple : l'homothétie vectorielle de rapport $-1$.

**e) Conclusion.** Les rotations vectorielles et les transformations orthogonales qui ne sont pas des rotations, vectorielles peuvent être étudiées de bien des manières. On peut, par exemple, faire l'étude systématique des symétries vectorielles orthogonales par rapport à des plans vectoriels et, $S$ étant leur ensemble, établir les théorèmes suivants :

- quels que soient deux vecteurs de même norme, il existe au moins une symétrie qui les échange ;
- le produit de deux éléments de $S$ est une rotation vectorielle ; inversement, toute rotation vectorielle est, et d'une infinité de façons, le produit de deux éléments de $S$.

  En particulier, une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle $D$ est le produit commutatif de deux symétries vectorielles orthogonales par rapport à deux plans vectoriels "perpendiculaires" contenant $D$ (deux plans vectoriels sont dits perpendiculaires s'ils sont orthogonaux à deux droites vectorielles orthogonales).

  On en déduit alors que :

- les rotations vectorielles de l'espace de dimension 3 forment un sous-groupe $O^+(E)$ du groupe orthogonal $O(E)$ ;
- toute transformation orthogonale est le produit de trois symétries $s$ au plus.

En d'autres termes, $O^-$ désignant l'ensemble $O - O^+$ des transformations orthogonales de $S$ autres que les rotations vectorielles :

$$\begin{array}{l} \forall g_1 \in O^+,\ \ \forall g_2 \in O^+.\quad g_2 \circ g_1 \in O^+ \\ \forall \gamma_1 \in O^-,\ \ \forall \gamma_2 \in O^-.\quad \gamma_2 \circ \gamma_1 \in O^+ \\ \forall \gamma \in O^-,\ \ \forall g \in O^+.\quad g \circ \gamma \in O^- \text{ et } \gamma \circ g \in O^- \end{array}$$

Dans l'espace de dimension 3, l'homothétie vectorielle de rapport $-1$ appartient à $O^-$ ; il en résulte que toute transformation de $O^-$, autre que cette homothétie vectorielle, est d'une manière unique :

- le produit commutatif d'une rotation vectorielle et de cette homothétie vectorielle,
- le produit commutatif d'une rotation vectorielle et d'une symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel orthogonal à l'axe de la rotation.

**f) Orientation de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3**. On a vu en Première les deux orientations possibles d'une droite vectorielle, puis d'un plan vectoriel euclidien.

$\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ étant deux vecteurs non nuls du plan vectoriel euclidien, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, $\sin(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'})$ est

l'élément $b$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, relative à $\mathscr{B}$, de la rotation vectorielle d'angle $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'})$.

Si le plan vectoriel euclidien est orienté, et si on le rapporte à une base $\mathscr{B}$ directe, alors le nombre $b$ et, par conséquent le nombre :

$$\begin{vmatrix} X & X' \\ Y & Y' \end{vmatrix} = XY' - YX' = \left\|\overrightarrow{V}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{V'}\right\| \sin(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'})$$

ne dépendent pas de la base directe $\mathscr{B}$.

Soient maintenant un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension 3 et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ deux bases orthonormées de $E$ ; on montrera que l'existence d'une rotation vectorielle (identité comprise) transformant l'une des bases en l'autre, est (comme dans le plan) une relation d'équivalence à deux classes, ce qu'on exprime en disant que $E$ est orientable ; privilégier l'une de ces classes, c'est orienter $E$.

Mais, l'espace vectoriel euclidien $E$ étant orienté, ses droites et ses plans vectoriels ne sont pas orientes par la même ; il est cependant possible, et souvent utile, de donner à un plan vectoriel $P$ et à la droite vectorielle $D$ qui lui est orthogonale des orientations associées. La convention suivante est alors commode : $P$ étant orienté et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant une base orthonormée directe de $P$, le sens positif de $D$ est le sens du vecteur $\vec{k}$ tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ forme une base orthonormée directe de $E$ ; on montrera que ce vecteur $\vec{k}$ est indépendant du choix du couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans $P$ ; si l'on change l'orientation de $E$, $\vec{k}$ est changé en son opposé. La demi-droite $\Delta$ de $D$ ayant pour vecteur directeur $\vec{k}$ est la demi-normale positive de $P$. Inversement, la convention précédente oriente $P$, dès qu'on a choisi une orientation sur $D$.

Le couple ($P$ orienté $\Delta$) ainsi obtenu est direct ; le triplet $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta)$ formé par les demi-droites vectorielles de bases respectives $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ est un triplet orthogonal direct de demi-droites ; le triplet $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2, \overrightarrow{V})$ formé par trois vecteurs portés par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$ dans l'ordre, est un triplet orthogonal direct de vecteurs.

On notera que la convention précédente permet de déterminer, dans l'espace vectoriel euclidien $E$ orienté, une rotation vectorielle par son axe $D$ orienté et par un nombre réel qui, en radians, degrés ou grades, caractérise l'angle $\varphi$ de cette rotation vectorielle dans le plan $P$ orthogonal à $D$ et orienté par l'orientation de $D$.

L'orientation de l'espace vectoriel euclidien $E$ entraîne celle de tout espace affine euclidien associé ; on dit que le repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct pour exprimer que la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $E$ est directe ; le trièdre formé par les trois demi-droites $Ox$, $Oy$, $Oz$, de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, est alors un trièdre trirectangle direct.

**g) Produit vectoriel.** Soient, dans l'espace vectoriel euclidien orienté $E$, deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ ; le produit vectoriel de $\overrightarrow{U}$ par $\overrightarrow{V}$ est un vecteur $\overrightarrow{W}$, noté $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ dans l'ordre et lu "U vectoriel V", qui est le vecteur $\overrightarrow{0}$ si $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est lié, et qui peut être défini de diverses façons si $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est libre ;

Ainsi :

- Soit $P$ le plan vectoriel déterminé par $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, qu'on oriente arbitrairement ; soit $\vec{k}$ le vecteur unitaire de la demi-normale à $P$ ainsi orienté ; alors $\overrightarrow{W} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{V}\right\| \sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})\,\vec{k}$, $\sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ étant évalué ici relativement à une base orthonormée directe de $P$ ; on vérifie que $\overrightarrow{W}$ ainsi défini est indépendant de l'orientation de $P$.
- Soit $\overrightarrow{V'}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{V}$ sur le plan vectoriel $Q$ orthogonal à $\overrightarrow{U}$ ; alors $\overrightarrow{W} = \left\|\overrightarrow{U}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{V'}\right\| \vec{k}$, où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V'}, \vec{k})$ soit un triplet orthogonal direct.
- $\overrightarrow{W}$ se déduit de $\overrightarrow{V}$ par trois applications linéaires successives, dont les deux dernières sont permutables : projection de $\overrightarrow{V}$ sur le plan $Q$ orthogonal à $\overrightarrow{U}$, homothétie vectorielle de rapport $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ et rotation vectorielle d'axe $D$ orienté par $\overrightarrow{U}$ et d'angle $\theta = +d$ (angle droit direct dans $Q$ orienté par $\overrightarrow{U}$).

On établira, en s'aidant au besoin de figures classiques, les propriétés du produit vectoriel, notamment :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda\overrightarrow{U} \wedge \mu\overrightarrow{V} = \lambda\mu\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$$
$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}$$
$$\overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V_2}$$

On exprimera les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ dans une base orthonormée directe, au moyen des coordonnées de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ ; bien des élèves retiendront ces expressions, ils devront tous savoir les retrouver promptement ; elles donnent une manière pratique de trouver la normale à un plan déterminé par deux vecteurs.

**§ 5 Isométries de l'espace affine euclidien.** On note ici $E$ un espace vectoriel euclidien et $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associés.

Une isométrie de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ est une application $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que :

$$\forall(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{E}^2, \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \left\|\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}\right\|$$

**a) Une isométrie est une bijection affine.** Quels que soient les trois points A, B,. C de $\mathscr{E}$, leurs images A′, B′, C′ par $f$ sont telles que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A'C'}} \quad \text{puisque}$$
$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \text{et que} \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}\right\|^2 \;\ldots$$

Soient O, I, J, K quatre points fixés de tels que $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}, \overrightarrow{\mathrm{OK}})$ forme un repère cartésien orthonormé ils sont transformés par $f$ en quatre points O′, I′, J′, K′ et $(\mathrm{O'}, \overrightarrow{\mathrm{O'I'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'J'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'K'}})$ forme aussi un repère cartésien orthonormé ;

tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le premier repère a pour image par $f$ le point M′ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le second repère et $x' = \overrightarrow{\mathrm{O'I'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O'\,M'}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x,\ y' = y,\ z = z'$ cela établit que $f$ est une bijection affine dont l'application vectorielle associée $F$ est une transformation orthogonale de $E$.

Les isométries forment un groupe et l'application qui à toute isométrie de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ associe la transformation orthogonale correspondante de l'espace vectoriel euclidien $E$ associé à $\mathscr{E}$, est un homomorphisme ; le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe des translations.

On appellera déplacements les isométries de $\mathscr{E}$ pour lesquelles la transformation orthogonale associée est une rotation vectorielle ; les déplacements forment un sous-groupe du groupe des isométries.

**b) Classification des isométries planes.** On classera d'abord les isométries planes :

- les déplacements plans ; on démontrera qu'un déplacement plan est une translation ou une rotation, dont on donnera la définition ;
- les antidéplacements plans ; on en donnera la forme canonique, à savoir le produit commutatif d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation parallèle à la droite

**c) Classification des déplacements de l'espace de dimension 3.** On définira les translations, les rotations, les vissages, et l'on démontre tout déplacement $f$ de l'espace est une translation, ou une rotation, ou au sens strict un vissage.

Le fait important qu'un déplacement $f$ est déterminé par la donnée de la transformation orthogonale associé $F$ et un couple $[\mathrm{A},\ \mathrm{A}' = f(\mathrm{A})]$ pourra être utilisé à cet effet.

La recherche des points fixes d'antidéplacements conduit, de façon naturelle et intéressante à classer les antidéplacements ; cette étude n'est pas au programme, elle peut donner lieu à des exercices dans une classe qui en exprime le désir, mais non à une question d'examen.

**d) Groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.** On se gardera de faire de cet alinéa un domaine d'érudition ; il s'agit surtout d'enrichir d'exemples tous les alinéas antérieurs. On se bornera à des exemples simples tels que segment, triangle équilatéral, carré, ensemble de deux droites non coplanaires, ensemble de deux plans, tétraèdre régulier, cube . . .

Les élèves se familiariseront ainsi avec les modèles d'un certain nombre de configurations utiles dans les sciences et les techniques ; on en rencontre dans l'étude des édifices atomiques.

## VII Compléments de géométrie euclidienne plane

**§ 1 Angles de droites.** Rappelons un résultat acquis en Première soient, dans le plan vectoriel euclidien $P$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des demi-droites vectorielles $\Delta$ incluses

dans $P$, $\mathcal{R}$ le groupe des rotations vectorielles de $P$. La relation dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ "il existe une même rotation vectorielle $\varphi \in \mathcal{R}$, qui fait passer de $\Delta_1$ à $\Delta_2$, de $\Delta'_1$ à $\Delta'2$" est une relation d'équivalence $\mathscr{H}$ et chaque classe d'équivalence est appelée un angle de demi-droites ; on donne à l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites une structure de groupe additif ($\omega$ angle nul, $p$ angle plat).

De même, soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble des droites vectorielles $D$ incluses dans $P$ ; la relation dans $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ "il existe une même rotation vectorielle $\varphi \in \mathcal{R}$, qui fait passer de $D_1$ à $D_2$, de $D'_1$ à $D'_2$" est une relation d'équivalence $\mathscr{H}'$ et chaque classe d'équivalence est appelée un angle de droites ; on donne à l'ensemble $\mathcal{A}'$ des angles de droites une structure de groupe additif.

Parce qu'il existe. sur une droite vectorielle deux demi-droites vectorielles opposées, il existe deux rotations vectorielles transformant la droite donnée $D_1$ en la droite donnée $D_2$, l'une d'elles a pour angle $\alpha$, l'autre $\alpha + p$. Par suite :

- soit $\alpha$ un angle de demi-droites, $\alpha \in \mathcal{A}$ ; l'application qui à $\alpha$ associe l'angle de droites $(D_1, D_2)$, $D_2$ étant la transformée de $D_1$ par la rotation vectorielle d'angle $\alpha$, est un homomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}'$, le noyau étant $\{\omega, p\}$ ;
- soit $a$ un angle de droites, $a =$ angle $(D, D') \in \mathcal{A}$ ; les angles des rotations vectorielles transformant $D$ en $D'$ sont $\alpha$ et $\alpha + p$ ; l'angle de demi-droites $\alpha + \alpha$ est égal à $(\alpha + p) + (\alpha + p)$ et l'application qui à $a$ associe $\alpha + \alpha$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$.

Ces résultats permettent d'étudier le problème des bissectrices d'un angle de droites vectorielles, ainsi que les deux ensembles de points M définis dans un plan affine euclidien associé, par la donnée de deux points A, B et d'un angle :

$$(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \alpha \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}}) = \alpha', \quad \alpha \in \mathcal{A}, \ \text{et} \ \alpha' \in \mathcal{A}'$$

**§ 2 Similitudes.** La définition géométrique de la similitude, donnée par le présent programme, offre l'intérêt de pouvoir être utilisée ultérieurement pour un espace affine euclidien de dimension $n > 2$ ; mais le programme se limite à l'étude des similitudes planes et le mode d'introduction est laissé au choix du professeur, soit par la géométrie, soit par les nombres complexes. L'équivalence de ces deux modes sera démontrée et les propriétés géométriques de cette transformation seront connues des élèves.

L'étude des similitudes planes directes, définies dans le plan complexe par $z \mapsto az + b$ $(a \neq 0)$, figurait déjà dans l'ancien programme de terminale C ; on étudiera aussi, dorénavant, les similitudes planes inverses, définies par $z \mapsto a\overline{z} + b$ $(a \neq 0)$.

L'inversion ayant disparu du programme, aucune question mettant en jeu des transformations de la forme $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ ou $z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$ ne peut plus être posée à l'écrit ou à l'oral du baccalauréat.

**§ 3 Coniques.** L'existence de la tangente à une conique en un point donné peut se déduire immédiatement de l'équation de la courbe (dérivée de $\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ par exemple), mais la dérivation vectorielle (III, 4) permet un développement plus riche en interprétations géométriques simples.

Les termes d'ellipse, d'hyperbole, de parabole, seront donnés en conclusion de l'étude des formes des courbes d'équation :

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0, \quad |A| + |B| \neq 0$$

On recherchera les ensembles de points définis, avec les notations d'usage, par $\text{MF} + \text{MF}' = 2a$, $|\text{MF} - \text{MF}'| = 2a$, $\text{MF} = e\text{M}\,m$ et l'on en déduira les deux définitions bifocale et monofocale de l'ellipse et de l'hyperbole ; la définition monofocale de la parabole ; on donnera les formes classiques des équations réduites des coniques, ainsi que l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Hormis ce tout dernier cas, le repère sera orthonormé et on sera amené naturellement à montrer que l'ellipse est transformée d'un cercle par une "affinité orthogonale".

On pourra évoquer nombre d'emplois des coniques en physique (miroirs, interférences, ...) et en astronomie (lois de Képler, ...).

Sont en dehors du programme :
- les propriétés des tangentes liées au cercle directeur ou au cercle principal ;
- les générations des coniques comme enveloppes de droites ;
- tout changement de repère tendant à "faire disparaître" le terme rectangle de l'équation générale d'une courbe du second ordre.

## VIII Probabilités sur un ensemble fini

**§ 1 Espace probabilisé** On a défini en Première des espaces probabilisés finis dans lesquels, $\Omega$ étant l'ensemble fondamental, toute partie de $\Omega$ est un événement.

Il existe des sous-ensembles non vides $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ tels que le complémentaire dans $\Omega$ de tout élément de $\mathscr{B}$ appartienne à $\mathscr{B}$ , ainsi que la réunion de deux éléments quelconques de $\mathscr{B}$ ; le couple $(\Omega, \mathscr{B})$ est dit un espace probabilisable. $\Omega$ et $\varnothing$ sont donc éléments de $\mathscr{B}$.

On dit que $p$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{B})$ si $p$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $p(\Omega) = 1$,

$$\forall (B_1, B_2) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}, \quad B_1 \cap B_2 = \varnothing \;\Rightarrow p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2)$$

II en résulte la formule :

$$\forall (B_1, B_2) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}, \quad p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2) - p(B_1 \cap B_2$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ est dit un espace probabilisé.

Une application mesurable (ou variable aléatoire) de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans un espace probabilisable fini $(\Omega', \mathscr{B}')$ est une application $\varphi$ de $\Omega$ dans $\Omega'$, telle que pour tout élément $B' \in \mathscr{B}'$ l'ensemble $\varphi^{-1}(B')$ est un élément de $\mathscr{B}$ ; si l'on pose alors $p'(B') = p[\varphi^{-1}(B')]$, le triplet $(\Omega', \mathscr{B}', p')$ est un espace probabilisé fini ; on dit que $p'$ est la probabilité-image par l'application $\varphi$.

Ces définitions seront illustrées d'exemples.

Pour introduire une variable aléatoire réelle, il est nécessaire d'associer à l'ensemble infini $\mathbb{R}$, un ensemble $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ de parties $B$ de $\mathbb{R}$ ; $B$ est élément de $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $B$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{R}$. La famille $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ a les propriétés de la famille $\mathscr{B}$ évoquée plus haut à propos de $\Omega$.

On introduira de même une famille $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$.

Une variable aléatoire **réelle** (appelée parfois aléa numérique) est alors une application mesurable $\varphi$ de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

La fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire réelle $\varphi$ est donnée par $F(x) = p\left[\varphi^{-1}\left(]-\infty, x[\right)\right]$.

Un couple de variables aléatoires réelles est une application mesurable $\varphi$ de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$ ; la loi du couple est la loi $p'$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad p'\left[\{x,y\}\right] = p'\left[\varphi^{-1}\left(\{x,y\}\right)\right]$$

Lé programme supposant $\Omega$ fini, $p'\left[\{x,y\}\right]$ n'est non nul que pour un nombre fini de couples $(u_i, v_j)$.

**Loi marginale.** Soit $\varphi$ un couple de variables aléatoires réelles. La première loi de probabilité marginale est la loi $p_1$ de la première composante de $\varphi$ :

$$B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \quad p_1(B) = p\left[\varphi^{-1}(B \times \mathbb{R})\right] \ ;$$

$p_1\left(\{x\}\right) = p\left[\varphi^{-1}\left(\{x\} \times \mathbb{R}\right)\right]$ n'est non nul que si $x$ est l'un des nombres $u_i$.

On définit de même la seconde loi marginale $p_2$. En général, on n'a pas, pour tout couple $(x,y)$ de réels,
$p'\left[\{(x,y\}\right] = p_1\left(\{x\}\right) \times p_2\left(\{y\}\right)$ ; quand ce fait se produit, les deux variables sont dites indépendantes.

Ces définitions se généralisent à un système de $n$ variables aléatoires.

**§ 2** L'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire $X$ à valeurs $u_1, \ldots u_k$ dans $\mathbb{R}$ est, par définition, le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} u_i p(u_i)$$

L'ensemble des variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini est un espace vectoriel application qui, à toute variable aléatoire $X$ associe son espérance mathématique est une forme linéaire sur cet espace vectoriel, en particulier, $X_1$ et $X_2$ étant deux variables aléatoires réelles, on a : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.

On démontrera que si $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X_1 \cdot X_2$ est $E(X_1) \cdot E(X_2)$.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs $(u_i, v_j)$ dans $\mathbb{R}^2$ est, par définition, le couple :

$$E[(u_i, v_j)] = \left(\sum_{(i,j)} u_i p'(u_i, v_j)\ ,\ \sum_{(i,j)} v_j p'(u_i, v_j)\right)$$

on y reconnaît encore une application linéaire, et aussi un barycentre.

La **variance** d'une variable aléatoire réelle $X$ est donnée par : $v(X) - E[X - E(X)]^2$ ; on démontrera qu'elle est égale à $E(X^2) - E^2(X)$. Par définition, l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$.

L'inégalité de **Bienaymé-Tchébicheff** indique que, si une variable aléatoire $X$ a une espérance mathématique $a$ et un écart-type $\sigma$, alors :

$$p\left(\left\{\frac{X-a}{\sigma} \geqslant \alpha\right\}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}$$

On appliquera particulièrement cette inégalité au cas où une expérience est répétée $n$ fois. On constate que, dans un grand nombre de situations concrètes, les résultats d'expériences successives sont sans influence les unes sur les autres. On traduit cette constatation en postulant l'indépendance des variables aléatoires correspondantes, indépendantes qui s'exprime dans le produit $\Omega' = \Omega^n$.

Sur $\Omega'$, la probabilité de l'événement $(x_1 = a_1, \dots x_n = a_n)$ est le produit des probabilités $p(a_1) \times \cdots \times p(a_n)$ ; l'inégalité de Bienaymé-Tchébicheff donnera la "loi faible des grands nombres", qui établit un premier lien avec la statistique ;
$X_1$, $X_2$, … $X_n$, étant des variables aléatoires indépendantes, de même loi et d'espérance mathématique commune $a$,
$Y_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ est une variable aléatoire telle que, pour tout réel strictement positif $\epsilon$, $\lim\limits_{n \to +\infty} p\left(\{|Y_n - a| \geqslant \epsilon\}\right) = 0$